RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 aprile 1905.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *La geometria non Archimedea. Una questione di priorità.* Nota del Socio G. VERONESE.

È noto che nell'introduzione dei miei *Fondamenti di geometria*, pubblicati nel 1891 (¹), seguendo il metodo sintetico astratto, ho svolto una teoria del continuo lineare che non soddisfa al postulato d'Archimede, teoria che mi servì per stabilire negli stessi *Fondamenti* la geometria non archimedea. Così ho risolto la secolare questione del segmento infinito e infinitesimo attuale, della quale si erano occupati insigni filosofi e matematici, non mai risolta perchè non era stata mai bene posta (²). È pure noto che io dovetti sostenere da principio alcune discussioni, anche con G. Cantor perchè egli aveva affermato in una sua pubblicazione sui suoi numeri transfiniti l'impossibilità del segmento infinitesimo attuale, senza però darne una dimostrazione completa (³).

(¹) Tradotti in tedesco da A. Schepp nel 1894, ed. Teubner. Vedi anche A., *Il continuo rettilineo e l'assioma d'Archimede.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, 2° sem. 1890.

(²) Vedi l'apppendice ai miei *Fondamenti,* nota IV.

(³) A., *Fond.*, Intr. Cap. VI, § 3. Appendice, nota IV. *Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale.* Atti del Circ. mat. di Palermo, 1902. *Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali.* Math. Ann. Bd. 47.

Io dimostrai invece che coi numeri transfiniti di Cantor non si può costruire una geometria non archimedea, e perciò non è possibile costruire con questi numeri un segmento infinitesimo attuale. Ma ho esplicitamente rilevato nell'introduzione stessa, ed anche in altre pubblicazioni, che i miei numeri infiniti e infinitesimi attuali, sono di natura affatto diversa da quelli del sig. Cantor (¹). E mentre io seguii il metodo sintetico nulla ammettendo di noto, il Levi-Civita, nel 1893 e poi nel 1898 (²), svolse, completandola, la teoria dei miei numeri partendo da concetti puramente aritmetici valendosi per la loro costruzione dei numeri reali ordinari. Ebbene, il Poincaré in una relazione sull'opera: *Grundlagen der Geometrie* dell'Hilbert, pubblicata nel 1899, scritta in occasione del conferimento del premio Lobatschewsky (³) esprime dei giudizi sulla mia teoria e sulla priorità della geometria non archimedea che non sono esatti. E sebbene di qualche critica e di qualche recensione (⁴) non mi sia occupato, pure è tanta l'ammirazione che ho dell'illustre matematico francese, Socio di questa nostra Accademia, e tale è la sua autorità, che non posso tacere, tanto più che questi giudizi sono stati riportati anche dall'Halsted, matematico americano, ben noto per i suoi lavori sui principî della geometria. Non posso dunque lasciare che tali giudizi si divulghino e danneggino l'opera mia, per quanto modesta essa sia.

Il Poincaré a pag. 3 della sua relazione dice:

« Enfin je dois citer le livre de M. Veronese sur les fondements de la « géométrie où l'auteur applique pour la première fois à la géométrie les « nombres transfinis de Cantor ».

E a pag. 14 e seguenti:

« *Mais la conception la plus originale de M. Hilbert* c'est celle de la « Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui « d'Archimède. Pour celle il fallait d'abord construire un système de nombres « non archimédiens c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût « concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appli- « quer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmé- « tique.....

(¹) L. c.

(²) *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.* Atti R. Istituto Veneto, 1903. *Sui numeri transfiniti.* Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem. 1898.

(³) *Rapport sur les travaux de M. Hilbert,* Kazan 1904. Questa relazione mi fu favorita recentemente dal prof. Wassilief di Kazan.

(⁴) Così non mi sono occupato ad es. della recensione di poche righe stampata nell'*Encyklopädie der Mathematik,* nella quale il sig. Schoenflies ripete dei dubbi ai quali era stato risposto da me e dal Levi-Civita in questi Rendiconti (1898), e nella quale egli insiste a voler distinguere nei suoi dubbi la teoria del Levi-Civita dalla mia, mentre il Levi-Civita stesso non riconosce una tale distinzione.

« On voit quelle est la portée de cette invention et en quoi elle con« stitue dans la marche de nos idées un pas presque aussi hardi que celui « que Lobatschewsky nous a fait faire; la géométrie non euclidienne respec« tait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique « tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La géométrie « non archimédienne détruit cette conception, elle dissèque le continu pour « y introduire des éléments nouveaux.

« Dans cette conception si audacieuse Hilbert avait eu un précurseur. « Dans ses fondements de la géométrie Veronese avait eu une idée analogue. « Le chapitre VI de son introduction est le développement d'une véritable « arithmétique et d'une véritable géométrie *non-archimédiennes où les « nombres transfinis de Cantor jouent un rôle prépondérant.* Toutefois par « l'élégance et la simplicité de son exposition, par la profondeur de ses vues « philosophiques, par le parti qu'il a tiré de l'idée fondamentale, Hilbert a « bien fait sa chose *de la nouvelle géométrie* ».

Da quanto ho sopra esposto risulta invece che non solo i numeri transfiniti di Cantor non hanno un ufficio preponderante nella mia teoria, ma che anzi i miei numeri sono di natura affatto diversa. Nella mia introduzione vi è, è vero, un paragrafo nel quale ho trattato dei numeri di G. Cantor, ma l'ho scritto appunto per far rilevare la differenza delle due teorie e l'errore in cui era caduto il Cantor affermando l'impossibilità del segmento infinitesimo attuale.

La priorità poi della geometria non archimedea debbo reclamarla intera. La mia geometria è più completa di quella dell'Hilbert, il quale, nella prima edizione nelle sue *Grundlagen*, chiama assioma della continuità il postulato d'Archimede, e nella seconda edizione e nella traduzione francese vi aggiunse un altro assioma (detto der Vollständigkeit) che corrisponde appunto per la retta con quello di Archimede al postulato del continuo di Dedekind. In ciò esiste una sostanziale diversità nell'interpretazione del continuo tra me e il sig. Hilbert, perchè per me l'assioma d'Archimede non è quello della continuità, anzi io ho reso questo indipendente dal primo, sì da costruire una geometria *continua* non archimedea ([1]). E in questo senso parmi interpreti il continuo anche il Poincaré colle parole sopra citate. Ma v'ha di più. Il sig. dott. Bindoni pubblicò nel 1902 in questi Rendiconti una Nota nella quale fece vedere come si possano mettere i miei numeri sotto la forma funzionale di quelli dell'Hilbert, onde trasse la conclusione che la *geometria dell'Hilbert è una parte della mia.*

Riconosco non solo il valore ma anche l'eleganza e la semplicità della esposizione di Hilbert; bisogna porre mente però nel confronto dei metodi, che io non volli avere a mia disposizione le risorse dell'analisi, costruendo le

([1]) Veggasi anche *Il postulato della continuità.* Questi Rendiconti, 2° sem. 1897.

prime forme matematiche, ed anche gli infiniti e infinitesimi, partendo invece da alcuni fatti e operazioni semplicissime del pensiero logico, e scomponendo, più che mi fu possibile, i varî concetti, senza far uso di alcun algoritmo già noto. È da notare inoltre che scopo primo, se non il principale, dei miei *Fondamenti*, dopo la pubblicazione del mio lavoro sugli iperspazi (1), fu quello di stabilire i principî della geometria del mio spazio generale (che ha un numero infinito di dimensioni) per via puramente sintetica, come quelli della geometria ordinaria. È naturale dunque che per le molte questioni in essi trattate e per il metodo seguito, forse più filosofico di altri perchè più conforme alla natura delle cose, il libro riuscisse voluminoso e poco elegante. È anche vero però che mentre analisti insigni convengono che il metodo migliore per trattare i principî della geometria è quello sintetico (2), avviene poi che questo metodo è il più trascurato (3).

Un'altra cosa desidero far rilevare, in cui parmi discostarmi dai signori Poincaré ed Hilbert, i quali, trattando la geometria più con le vedute dell'analisi che con quelle dell'intuizione spaziale, sono portati a dare alla geometria un'estensione maggiore di quella che secondo l'intuizione essa possa e debba avere.

L'introduzione dei miei *Fondamenti* è una parte dell'Ausdehnungslehre, ossia la teoria dei gruppi di elementi trattati col metodo sintetico astratto. In questa teoria ogni ipotesi matematicamente possibile è ammissibile e dà luogo a nuove forme; ma non sempre a queste forme corrispondono delle forme geometriche.

Nella prefazione dei *Fondamenti*, e negli *Elementi* e altrove (4), ho stabilito quali sono, a mio avviso, i caratteri degli assiomi e dei postulati geometrici. E ripeto anche qui che per me i veri assiomi sono quelle proposizioni che valgono nel campo limitato della nostra osservazione esterna, ed anche quando tali proposizioni si estendono allo spazio illimitato (che non possiamo osservare) bisogna dimostrare che tale estensione è matematicamente possibile. Vi sono invece proposizioni (propriamente postulati) le quali non contraddicono ai precedenti assiomi, nè si contraddicono fra loro, e che pure sono geometricamente ammissibili. Tali sono ad esempio le varie forme del postulato del continuo sotto la forma data da Dedekind o sotto quella data da me indipendentemente dall'assioma d'Archimede, i postulati che servono a costruire gli spazi superiori, ecc. che servono a completare o a limitare il

(1) *Behandlung der project. Verhältnisse der Räume von Mehreren Dui*, etc. Math. Annalen, 1881.

(2) Vedi pref. dei *Fondamenti*.

(3) È noto ad es. la sorte toccata per questo all'Ausdehnungslehre del 1844 del Grassmann.

(4) *Les postulats de la géom. dans l'enseignement*. (trad. par Duporcq et Brocard). Atti del Congresso mat. intern. di Parigi 1900.

campo geometrico. Possibili sono dunque geometricamente, la geometria non euclidea, la geometria iperspaziale, la geometria non archimedea. In queste geometrie i dati dedotti dall'esperienza sono mantenuti. Ma un assioma che stabilisce ad esempio che la linèa più semplice (cioè la retta) è determinata da tre punti indipendenti anzichè da due, sarebbe ammissibile nell'Ausdehnungslehre, ma non nella geometria. Ecco ad esempio che una *geometria piana* nella quale non valga il teorema di Desargues, o non arguésienne, per me non esiste; esiste soltanto una forma astratta alla quale può corrispondere anche una forma geometrica ma non un *piano*. Ciò non toglie però che nell'analisi dell' indipendenza dei postulati sia utile tralasciarne alcuni sostituendoli astrattamente con altri e costruendo così nuove forme astratte, come ha fatto in modo ammirabile il sig. Hilbert.

Matematica. — *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. In due Note precedenti [1] ho mostrato che le leggi dell' equilibrio dei corpi solidi elastici i quali occupano spazî più volte connessi (*ciclici*) si differenziano da quelle dei solidi elastici che occupano spazî semplicemente connessi (*aciclici*), ammesso in ambo i casi che le deformazioni siano regolari.

Se lo spazio occupato dal solido è ciclico sono possibili delle *distorsioni* le quali determinano uno stato di tensione nel corpo anche in mancanza di forze esterne. Tali distorsioni invece non si possono avere quando il corpo elastico occupa uno spazio aciclico.

Nel caso dunque in cui il corpo elastico occupa uno spazio ciclico si presenta tutta una serie di problemi che interessa risolvere; i problemi cioè di determinare gli stati di tensione dei corpi dovuti a date distorsioni ad essi applicate.

Onde facilitare la risoluzione di questi problemi, preparando la via a trasformarli convenientemente, esporremo molto brevemente in questa Nota alcune considerazioni d' indole generale.

2. Cominciamo dal calcolare la energia di un solido elastico soggetto a date distorsioni.

Denotiamo con t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12} le sei caratteristiche della tensione di un solido elastico deformato (lo *stress* secondo la denominazione degli Inglesi) e con γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{23}, γ_{31}, γ_{12} le sei caratteristiche della deformazione (lo *strain*).

[1] Sedute del 5 e del 19 febbraio 1905.